

Próbny egzamin ósmoklasisty

MATEMATYKA

Czerwiec 2020

**Odpowiedzi i zasady
przyznawania punktów**

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

(każda poprawna odpowiedź to 1 punkt)

Nr zadania	A	B	C	D
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Nr zadania	AC	AD	BC	BD
6	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Nr zadania	PP	PF	FP	FF
7	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Nr zadania	AC	AD	BC	BD
8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
9	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Nr zadania	A	B	C	D
10	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
11	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Nr zadania	A1	A2	A3	B1	B2	B3
12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Nr zadania	A	B	C	D
13	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
14	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
15	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Rozwiązania i zasady punktacji zadań otwartych

Poniżej znajdziesz rozwiązania do zadań otwartych oraz wskazówki, jak przyznawać sobie punkty za te zadania. Pamiętaj jednak, że jest to – z konieczności – schemat bardzo uproszczony. Podajemy po jednym lub dwóch rozwiązaniach. Jednak każdy inny poprawny sposób również zostanie oceniony na maksymalną liczbę punktów.

Zadanie 16. (0–3)

Klasa 8a wybiera się na wycieczkę szkolną autokarem. Zgodnie z planem wycieczka ma trwać 4 dni: pierwszego i ostatniego do pokonania jest po 300 km, drugiego autokar nie będzie używany, a trzeciego przejedzie 50 km. Rodzice znaleźli oferty dwóch przewoźników:

	cena za 1 km	uwagi
firma A	4,5 zł	dodatkowa opłata 100 zł za każdy dzień wypożyczenia (płatne nawet jeżeli autokar nic nie przejedzie danego dnia)
firma B	4 zł	jeżeli danego dnia autokar nie przejedzie więcej niż 100 km to obowiązuje opłata stała wysokości 400 zł (w takim wypadku nie płaci się dodatkowo za kilometry)

Oblicz koszt czterodniowego wynajmu autokaru w obu przypadkach. Wybór której firmy bardziej się opłaca? Zapisz obliczenia.

firma A

W sumie autokar przejedzie: $2 \cdot 300 + 50 = 650$ kilometrów. Koszt kilometrów to $650 \cdot 4,5 = 2925$. Do tego musimy dodać opłatę stałą za cztery dni wynajmu: $2925 + 4 \cdot 100 = 3325$. Czyli całkowity koszt wynajmu autokaru w firmie A wynosi 3325 złotych.

firma B

Tutaj płacimy tylko kilometry pierwszego i ostatniego dnia $2 \cdot 300 \cdot 4 = 2400$. Opłata stała w tym wypadku to $2 \cdot 400$, czyli całkowity koszt wynajmu autokaru w firmie B wynosi 3200 złotych.

podsumowanie

Skoro wynajem w firmie B jest o 125 złotych tańszy, to właśnie oferta tej firmy jest bardziej opłacalna.

Przykładowa punktacja:

- 1p.** dostaniesz, jeśli masz poprawny pomysł, jak obliczyć koszt wynajmu w jednej z firm
- 2p.** dostaniesz, jeśli masz poprawny pomysł, jak obliczyć koszt wynajmu w obu firmach
- 3p.** dostaniesz, jeśli bezbłędnie obliczysz koszt w obu przypadkach i wskażesz bardziej opłacalny wariant.

Zadanie 17. (0–3)

W pewnej firmie jedną trzecią wszystkich pracowników stanowią sprzedawcy. Sekretarek jest o dwie mniej niż sprzedawców, natomiast kierowców jest dwa razy więcej niż sekretarek. Oprócz tego firma zatrudnia 1 informatyka. Ile osób pracuje w tej firmie?

Oznaczamy przez x liczbę wszystkich pracowników i zależności od tego opisujemy ilu jest pracowników na poszczególnych stanowiskach:

x - liczba wszystkich pracowników tej firmy

$\frac{1}{3}x$ - liczba sprzedawców

$\frac{1}{3}x - 2$ - liczba sekretarek

$2\left(\frac{1}{3}x - 2\right)$ - liczba kierowców

Teraz układamy równanie, mówiące o tym ile jest pracowników:

$$x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x - 2 + 2\left(\frac{1}{3}x - 2\right) + 1$$

$$x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x - 2 + \frac{2}{3}x - 4 + 1$$

$$x = \frac{4}{3}x - 5$$

$$5 = \frac{1}{3}x$$

$$15 = x$$

Udzielamy odpowiedzi:

Odp.: W tej firmie pracuje 15 osób.

Przykładowa punktacja:

- 1p.** dostaniesz, jeśli dokonasz analizy zadania, czyli wskażesz niewiadomą (x) i zapiszesz wyrażenia algebraiczne oznaczające, ilu jest pracowników na poszczególnych stanowiskach
- 2p.** dostaniesz, jeśli ułożysz równanie, z którego można wyliczyć szukaną wielkość
- 3p.** dostaniesz, jeśli obliczysz, ilu jest w sumie pracowników

Zadanie 18. (0–2)

Mały słoik ma pojemność 0,35 litra i bez zawartości waży 0,4 kg, natomiast duży słoik ma pojemność 2 litrów i pusty waży 0,9 kg. Mały słoik pełen dżemu waży 0,82 kg. Ile waży duży słoik wypełniony takim samym dżemem? Zapisz obliczenia.

Skoro pusty mały słoik waży 0,4 kg, a pełny 0,82 kg, to oznacza, że w małym słoiku zmieści się $0,82 - 0,4 = 0,42$ kg dżemu. Oczywiście ilość dżemu, którą można włożyć do słoika jest wprost proporcjonalna do objętości słoika. Układamy proporcję:

$$\begin{array}{l} 0,42 \text{ kg} - 0,35 \text{ l} \\ x \text{ kg} - 2 \text{ l} \end{array}$$

Stąd wynika, że:

$$x = \frac{0,42 \cdot 2}{0,35} = \frac{0,84}{0,35} = \frac{84}{35} = \frac{12}{5} = 2,4$$

Na końcu musimy uwzględnić masę dużego słoika: $2,4 + 0,9 = 3,3$.

Udzielamy odpowiedzi:

Odp.: Duży słoik pełen dżemu waży 3,3 kg.

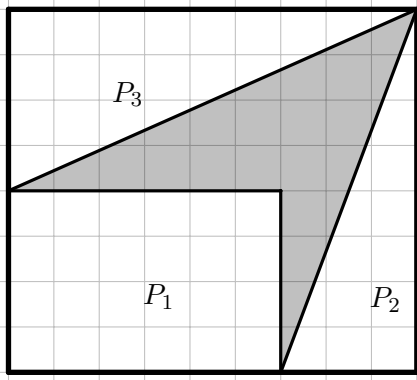
Przykładowa punktacja:

- 1p.** dostaniesz, jeśli zapiszesz proporcję lub równanie, z którego można obliczyć masę dżemu w dużym słoiku
- 2p.** dostaniesz, jeśli obliczysz masę dżemu w dużym słoiku i podasz odpowiedź uwzględniającą masę słoika

Zadanie 19. (0–2)

Oblicz pole poniższej figury, jeśli wiadomo, że bok kratki ma długość 0,5 cm. Zapisz obliczenia

sposób 1: Dorysowujemy prostokąt:



Liczmy pola:

$$P_1 = 2 \cdot 3 = 6$$

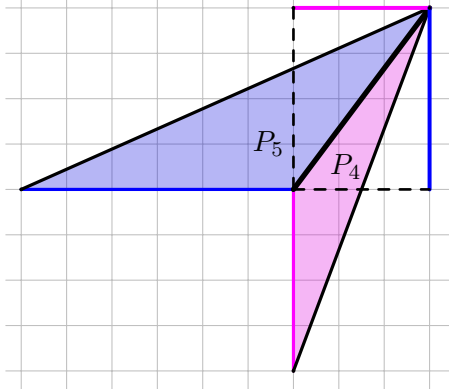
$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 4 = 3$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4,5 = 4,5$$

$$P_p = 4 \cdot 4,5 = 18$$

$$P_s = 18 - 3 - 4,5 - 6 = 4,5$$

sposób 2: Dzielimy figurę na dwa trójkąty:



Liczmy pola:

$$P_5 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$$

$$P_4 = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 2 = 1,5$$

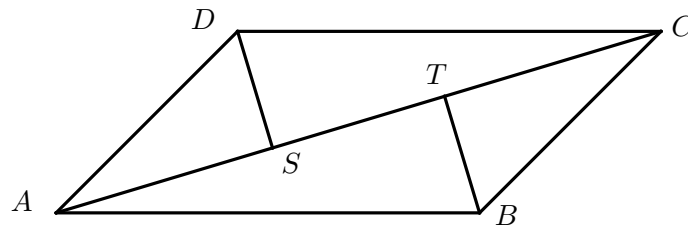
$$P_s = 3 + 1,5 = 4,5$$

Przykładowa punktacja:

- 1p. dostaniesz, jeśli zaprezentujesz pomysł na to, jak obliczyć pole (np. podzielisz figurę na trójkąty i odczytasz długości odpowiednich boków i wysokości)
- 2p. dostaniesz, jeśli obliczysz poprawnie szukane pole

Zadanie 20. (0–2)

Dany jest równoległobok ABCD. Odcinek DS jest wysokością trójkąta ADC, a odcinek BT jest wysokością trójkąta ABC.



Czy trójkąty ASD i CTB są przystające? Odpowiedź uzasadnij.

$\triangle ACD \equiv \triangle BCT$ na mocy cechy przystawania KBK:

K: $\sphericalangle DAS = \sphericalangle TCB = \alpha$ bo są to kąty naprzemianległe ($AD \parallel BC$ z definicji równoległoboku)

B: $AD = BC$ z własności równoległoboku (przeciwnie boki równoległoboku zawsze są równe)

K: $\sphericalangle ADS = \sphericalangle CBT$ bo:

1. $\sphericalangle ADS = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$ (suma miar kątów w $\triangle ADS$)

2. $\sphericalangle CBT = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$ (suma miar kątów w $\triangle CBT$)

Przykładowa punktacja:

1p. dostaniesz, jeśli podasz i uzasadnisz 2 z 3 równości

2p. dostaniesz, jeśli powołasz się na odpowiednią cechę przystawania i uzasadnisz wszystkie trzy równości

Zadanie 21. (0–3)

Podstawa ABC ostrosłupa $ABCS$ jest trójkątem równobocznym o długości boku długości 4 cm, a odcinek AS jest wysokością tego ostrosłupa i ma długość 6 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

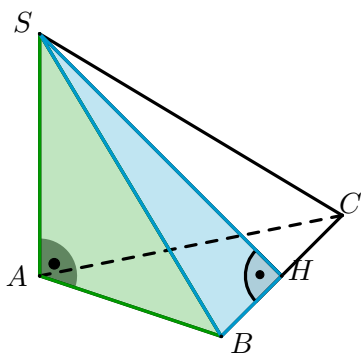
Pola trzech ścian (podstawa i ściany boczne będące trójkątami prostokątnymi) liczy się prosto:

$$P_P = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \text{ - bo to jest pole trójkąta równobocznego}$$

$$P_{ABS} = P_{ACS} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$$

Trudniej jest policzyć pole ściany BCS . W tym celu jest nam potrzebna długość wysokości SH . Można ją obliczyć na dwa sposoby:

sposób 1:



Obliczamy długości boków $BS = SC$ (zielony trójkąt) :

$$|BS|^2 = |AS|^2 + |AB|^2 = 36 + 16 = 52$$

$$|BS| = |SC| = \sqrt{52}$$

Teraz wykorzystujemy to, że wysokość SH podzieli odcinek BC na pół (bo jest to trójkąt równoramienny - niebieski trójkąt):

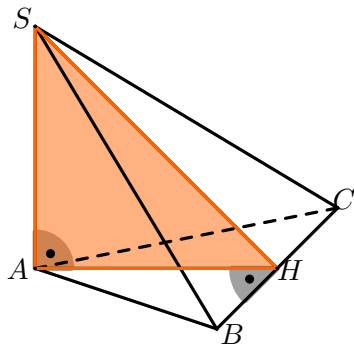
$$|SH|^2 + |HB|^2 = |BS|^2$$

$$|SH|^2 + 2^2 = \sqrt{52}^2$$

$$|SH|^2 = 52 - 4 = 48$$

$$|SH| = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

sposób 2:



AH jest wysokością trójkąta równobocznego, więc:

$$|AH| = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Obliczamy długość wysokości SH korzystając z $\triangle SAH$ (pomarańczowy trójkąt):

$$|SH|^2 = |AS|^2 + |AH|^2 = 6^2 + (2\sqrt{3})^2 = 36 + 12 = 48$$

$$|SH| = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

Teraz czas na podsumowanie:

$$P_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

$$P_c = P_p + P_{ABS} + P_{ACS} + P_{BCS} = 4\sqrt{3} + 12 + 12 + 8\sqrt{3} = 24 + 12\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

Przykładowa punktacja:

- 1p. dostaniesz, jeśli obliczysz pola trzech ścian (podstawy, ABS i ACS) lub podasz poprawny sposób obliczenia wysokości czwartej ściany
- 2p. dostaniesz, jeśli obliczysz pola wszystkich ścian, ale twoje rozwiązanie będzie zawierało błędy rachunkowe
- 3p. dostaniesz, jeśli bezbłędnie obliczysz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa